

連載 オブジェクト指向と哲学

第 65 回 数学は発明か発見か？(2) - 非ユークリッド幾何学

河合 昭男

<http://www1.u-netsurf.ne.jp/~Kawai>

プラトンのアカデメイアの入り口には「幾何学を知らぬもの、この門くぐるべからず」と書かれていたそうです。

●ユークリッド幾何学

「原論」を書き残したエウクレイデス（英語ではユークリッド）は B.C.3 世紀頃の人です。その時代から 19 世紀初め頃まで 2000 年に渡ってユークリッド幾何学は絶対に正しいと長く信じられてきました。

この公理系の中の第 5 公準「平行線公準」と呼ばれるものは本当に正しいのか、疑問を投げる人たちが 19 世紀になって現れてきました。「原論」のオリジナルの表現は異なりますが、現在では同値な次のような表現が用いられています。

平行線公準：

「直線 L とその上にない点 P に対して、 P を通り L と交わらない直線はただ 1 本存在する。」

現在でも一般的な平面幾何学の基本法則です。

●非ユークリッド幾何学

平面でない曲面上では平行線公準は必ずしも成立しません。球面、例えば地球上で赤道に直行する任意の 2 本の経線は赤道付近では平行のようですが、すべて北極・南極で交わってしまい、平行にはなりません。

一方、馬の鞍形の曲面では、上記 P を通り L と交わらない直線は何本も引くことができます。

以下[2]より要旨抜粋し、まとめます。

非ユークリッド幾何学の論文を最初に発表したのは、ロシアのニコライ・イワノビッチ・ロバチェフスキー（1792-1856）です。双曲幾何学と呼ばれ、ユークリッドの第 5 公準は

「1本の直線とその直線上以外の一点が与えられたとき、その直線と平行でその点を通る直線が2本以上存在する」

という命題に置き換えられます。

ロバチェフスキーとは別に、ハンガリーのボーヤイ・ヤーノシュ（1802-1860）も独自に同様の研究をしていました。数学者である父、ボーヤイ・ファルカシュ（ハンガリーでは姓・名の順に表記する）に手紙で内容を知らせました。父は自分で評価できないので、知り合いで当時最大の数学者として知られていたカール・フリードリッヒ・ガウス（1777-1855）に手紙で相談しました。

ガウスからの1832年3月6日の返信には次のような驚くべき内容が書かれています。

●ガウスと非ユークリッド幾何学

--

私はこの研究を賞賛できない、と言ったらあなたはきっと驚かれるでしょう。ですが、賞賛するわけにはいかないのです。なぜなら、それは自画自賛になってしまうからです。というのも、この研究の内容、あなたのお子さんが用いた手法、導き出した結論、その全てがここ30~35年間で私が思案してきた内容とほとんど一致するのです。ですから、私はただ驚くばかりでした。私自身の研究については、これまでほとんど発表していませんし、生涯発表しないつもりでおりましたから。[2]

--

なんとガウスも30年位前から同じことを考え、しかも人には伏せていたのです。ガウスは素数の数を与える近似式も発表しませんでした、あまり公開を好まない人です。

イマヌエル・カント（1724-1804）は「純粋理性批判」でユークリッド幾何学について、第1に「物理的空間の唯一の正確な記述である」、第2に「堅牢で、自明で、絶対的な演繹構造である」と主張していたことがガウスの発表を控えさせた理由の一つのようです。（[2]より要旨抜粋）

しかし手紙は続きます。

--

ですが、私が死んで研究がうやむやになってはいけませんので、いつかはすべてを書き遺すつもりでいました。ですから、私は驚いていると同時に、手間が省けてうれしくもあるのです。そ

して、このような見事な方法で私の先を越したのが旧友の息子だったことは、喜ばしい限りです。

[2]

--

平行線公準はエウクレイデスが頭の中で作り出した概念に過ぎないのか？平行線の数は「1 本のみ／複数／存在しない」この 3 つからどれでも一つを幾何学の公理体系に取り込むことができる。ユークリッド幾何学はエウクレイデスが発明し、非ユークリッド幾何学はロバチェフスキーやリーマンなどが発明したと考えるべきなのか。それともプラトンの世界観を採り、それらは「数学者たちの献身的な努力によりに畏れ多くも[1]」発見されたと考えるべきなのか。

複数の人達が独自に到達したとしても、それは発明か発見かの根拠にはならない。どちらもあり得るとしか言えない。

●ラマヌジャン

インドのシュリニヴァーサ・ラマヌジャン (1887-1920) は、夢に定理や公式が現れるという特異な数学の天才です。毎朝、証明のない結果だけを次々ノートに書き出します。そこにはすでに数学者の間で既知のものもあれば、まだ誰も知らないものも混在しています。150 年前にオイラーが解いていた式もあります。

イギリスの数学者とコンタクトしようと手紙を送ります。最初の手紙は「1913 年 1 月 16 日、マドラスにて」に続き、次のような書き出しで始まります。

--

謹啓、自己紹介させてください。小生はマドラス港湾信託局経理部に務める事務員にて、23 歳くらい、年俸 20 ポンドほどでございます。大学へは行きませんでした、普通教育は受けております。(以下省略) [4]

--

一緒に送られてきた論文には、

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

という明らかに発散する無限級数の値が「 $-1/12$ 」であることを発見したと書き記されています。が、このような手紙を送ってきたのは無名のインド人、しかも研究者でなくマドラス港湾局の事務員です。「自然数をすべて加えるとマイナスの分数になるというのだから、まるで狂気の沙汰である。[3]」全く非常識な内容であり、手紙は読む必要もない、とほぼ無視されかけます。

手紙はケンブリッジの G.H.ハーディ (1877-1947) の目に止まり、同僚の J.E.リトルウッド (1885-1977) に話します。ふたりは、これはリーマンのゼータ関数 $\zeta(-1)$ だと気づきます。

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots \\ & = 1 + 1/2^{-1} + 1/3^{-1} + \dots + 1/n^{-1} + \dots \\ & = \zeta(-1) \end{aligned}$$

--

ふたりの目の前にあるのは、ゼータ関数にマイナス 1 を入れた時の値をどう計算するか、という問題に対するリーマンの答えだった。正式の訓練を受けてこなかったラマヌジャンは、たったひとりで全レースを走り抜き、ゼータ関数の風景に関するリーマンの発見を再構成していたのである。[3]

--

これは発明か発見か、ゼータ関数という形式はオイラーから引き継いで発展させたリーマンの発明です。しかしどのような名前と呼ぼうと、この事実は誰かに発見される前から存在しているのです。だからインドにいたラマヌジャンは、リーマンに教えられなくとも独自にインスピレーションを得て「畏れ多くも」発見できたのです。...以下次回。

参考書籍

- [1]エドワード・フレンケル、[訳]青木薫、数学の大統一に挑む、2015、文藝春秋
- [2]マリオ・リヴィオ、[訳]千葉敏生、神は数学者か？、2011、早川書房
- [3]マーカス・デュ・ソートイ、[訳]富永星、素数の音楽、2013、新潮文庫
- [4]ロバート・カニーゲル、[訳]田中靖夫、無限の天才 - 夭逝の数学者ラマヌジャン、1994、工作舎