

連載 オブジェクト指向と哲学

第 64 回 数学は発明か発見か？ - プラトンの世界観

河合 昭男

<http://www1.u-netsurf.ne.jp/~Kawai>

--

数学は、プラトンの概念世界のどこかにそびえ立つ、壮麗な城である。(数学者たちは) 献身的な努力によって、畏れ多くもその城を発見するのである。(発明するのではなく) [1]

--

映画にもなったカール・セーガンの小説「コンタクト」は、SETI (地球外知的生命体探査) の電波望遠鏡が、ノイズの中からドラムビートをキャッチする場面から物語が展開します。パルスが 2 つ、一休みして 3 つ、一休みして 5 つ、7、11、・・・907 まですべての素数が並び、また最初に戻ります。[3]

素数は人類が発明した概念ではない。進化した生命体なら必ず発見している。物理的な宇宙誕生と同時に数学の概念がセットとしてそこに組み込まれている。宇宙と素粒子という極大と極小の両極端の世界も、そこに組み込まれた数学の法則が支配する。「水・空気・火・土」の四大元素が物理的宇宙の根源物質と考えられていたギリシャ時代、ピュタゴラスは万物の根源は数であると考えた。

●天文学・数学・音楽

古来探求されてきた、天文学・数学・音楽の 3 つは密接に繋がっている。ピュタゴラスは、最も神聖なものとしたテトラクテュスから数学と音楽の関係を探求した。ピュタゴラス派の天球の音楽の概念はプラトンに引き継がれ、惑星は音楽を奏でながら回っているというモデルを提示した。

ピュタゴラスの天球の音楽の概念は、その後 2000 年近い年月を隔ててケプラーに引き継がれます。

●素数の音楽

素数は数の原子です。あらゆる数 (2 以上の自然数) は素数の積に一意に分解できる。万物の根源は数であり、その根源は素数です。

マーカス・デュ・ソートイは「素数の音楽」[3]で、素数の研究に魅せられた 3 人の大数学者を中心軸に据えます。

レオンハルト・オイラー (1707 - 1783)

カール・フリードリヒ・ガウス (1777 - 1855)

ベルンハルト・リーマン (1826 - 1866)

この 3 人の数学者、ソクラテス／プラトン／アリストテレスを連想しますが、後者はほぼ 40 歳位の年齢差で、直接師弟関係があります。ガウスが 6 歳の頃オイラーは亡くなっており、この 2 人に直接的接触はありません。リーマンはガウスの 49 歳年下の弟子です。

●オイラーと素数

『オイラーは素数の計算が大好きだった。自分でも 100,000 を超えるあたりまでのすべての素数の表を作った。』[3]素数の探求を続けたが、すべての素数を生成する単純な一般式は見つけられなかった。オイラーは 1751 年、次のように記しています。

--

この世には、人知でうかがい知れない神秘が存在する。そのことを得心したければ、素数の表を一目見ればよい。そうすれば、そこには秩序も規則もないことがわかるだろう。[3]

--

オイラーにとって素数の奏でる音楽は不協和音だった。

オイラーはかなり核心に近付いていたことが 100 年後リーマンによって示されます。リーマンの素数研究のきっかけを作ったのはガウスです。[3]

●オイラーと音楽

オイラーは「人類史上最も多く論文を書いた数学者」(ウィキペディア)で多数の業績が残されています。

『オイラーには軍事や数学だけでなく音楽理論の論文もあるが、皮肉なことにその論文は、音楽家からは数学的過ぎると言われ、数学者からは音楽的過ぎると言われた。』[3]

ちなみにその 100 年程前に出版され、ケプラーが第 3 法則を樹立した「宇宙の調和」は音楽理論がかなりの割合を占めています。楽譜がいっぱいあり、正にピュタゴラスから引き継がれた「天

球の音楽」の書です。

●ガウスと素数

ガウスは素数そのものの一般式ではなく、ある範囲にどれくらいの素数があるかを調べます。10 以下には 4 個、100 以下には 25 個、1000 以下には 168 個というように 10 倍するとどれくらいの素数があるか、そこから素数の割合を調べ、10 倍するごとに素数と次の素数との間隔が平均 2.3 ずつ大きくなるという規則性を発見します。

『素数自体はまるででたらめなのに、突然霧の中から驚くべき規則性がぬっと姿を現した。』[3]

比を差に変換するのは対数で、ある数の前後の素数の間隔は 10 ではなく e を底とする自然対数になるという規則性を発見します。ガウスはまだ 15 歳の少年のときだという。

n 以下の素数の数を $\pi(n)$ で表すと、 $\pi(n)$ は $n / \log n$ で近似できる。

ガウスは素数の木を見ずに一步離れて素数の森を見た。 $\pi(n)$ はグラフにすると値は素数階段と呼ばれる不連続なグラフになる。 $n / \log n$ はなだらかに増加する曲線になる。

ガウスはある範囲までこの関数が $\pi(n)$ を近似できることを確認したが、その先も正しいことは証明できなかった。オイラーは多数の論文を公開したが、ガウスはほとんど公開せず日記などに記述した。この発見も対数表の本に書き留めたが公開しなかった。素数の探求はガウスの弟子リーマンに引き継がれます。

●ガウスと天文学

ガウスは多方面に才能を発揮したが、天文学との結びつきも強い。

19 世紀の最初の日 1801 年 1 月 1 日、小惑星ケレスが発見された。数週間で地球から観測できなくなってしまった。24 歳のガウスはそのわずかのデータから次に現れる位置と時間を予測し、それが当たって天文学者の間で一躍有名になった。その後 1806 年ゲッティンゲンの天文観測所長に就任している。

以下、次回

参考書籍

[1]エドワード・フレンケル、[訳]青木薫、数学の大統一に挑む、2015、文藝春秋

[2]マリオ・リヴィオ、[訳]千葉敏生、神は数学者か？、2011、早川書房

[3]マーカス・デュ・ソートイ、[訳]富永星、素数の音楽、2013、新潮文庫